

ECON 2130

HG, revidert april 2011

Notat til kapittel 7 i Løvås**Om enkel lineær regresjon II**

Merk: Det kan lønne seg først å lese avsnitt 4 i regresjon-I-notatet på nytt.

Regresjonsmodellen.

La Y være en stokastisk variabel (som vi kaller responsvariabelen) og x en forklaringsvariabel som oppfattes som ikke-stokastisk. Vi tenker oss da at paret (x, Y) observeres sammen slik at Y kun observeres sammen med gitte x -verdier. I eksemplet fra regresjon-I-notatet med skøytetider fra EM i Heerenveen 2004, kunne x representere 5000m-tiden (i sekunder), og Y representere 1500m-tiden (i sekunder) en vilkårlig valgt skøyteløper ville oppnå dersom vedkommende løp 1500m dagen etterpå. Denne skøyteløperen er ikke nødvendigvis en av dem som deltok i Heereveen i 2004, men tenkes tilfeldig valgt fra populasjonen av skøyteløpere mer generelt i 2004 som var i stand til å løpe 5000m på x sekunder. (Jfr. litt diskusjon av populasjonsbegrepet i avsnitt 4 i regr.-I-notatet.)

I den enkle (og eneste) regresjonsmodellen i pensum antas Y normalfordelt, og sammenhengen mellom x og Y uttrykkes via forventningen til Y ¹

$$(1) \quad E(Y) = \mu(x) = \alpha + \beta x \quad \text{for vilkårlig } x \text{ i et passende definisjonsintervall.}$$

I tillegg antas at variansen til Y for gitt x -verdi er konstant uansett hva x er:

$$(2) \quad \text{var}(Y) = \sigma^2 \quad \text{uansett hva } x \text{ er.}$$

Merk at vi kan skrive denne modellen kort som $Y \sim N(\mu(x), \sigma) = N(\alpha + \beta x, \sigma)$ for x i definisjonsintervallet.

α kalles for *konstantleddet*, β for *regresjonskoeffisienten* og $\mu(x)$ for *regresjonsfunksjonen*. β tolkes ofte som "effekten av en enhets endring i x på Y ".

[Begrunnelse: La x_1 og $x_1 + 1$ være to x -verdier med en enhets forskjell. La Y' og Y'' være tilsvarende responser. Forventet endring i Y blir da
 $E(Y'' - Y') = E(Y'') - E(Y') = \mu(x_1 + 1) - \mu(x_1) = \alpha + \beta(x_1 + 1) - (\alpha + \beta x_1) = \beta$]

¹ Symbolkollisjon: Merk at konstantleddet α i (1) ikke må forveksles med den α som dukker opp i konfidensgrader og signifikansnivå hos Løvås.

(3) NB! Merk at hvis den “sanne” verdien $\beta = 0$ i denne modellen, vil leddet βx forsvinne fra $\mu(x)$ og fordelingen for Y være den samme uansett hva x er. I så fall er regresjonsfunksjonen flat, og det er ingen sammenheng mellom x og Y . Modellen omfatter altså muligheten av at det ikke er noen sammenheng mellom x og Y .

En alternativ og ekvivalent formulering av modellen er

$$(4) \quad Y = \alpha + \beta x + e$$

der x er en gitt ikke-stokastisk størrelse og e er en stokastisk variabel (kalt *feilledd* eller *restledd*²) som er normalfordelt med forventning 0 og varians σ^2 , dvs. $e \sim N(0, \sigma)$.

Vanligvis vil modellen referere til en eller annen populasjon av interesse (jfr. skøyteeksemplet). I relasjon til en slik populasjon (som ikke kan observeres i sin helhet) vil parametrene, α, β og σ og således også regresjonsfunksjonen $\mu(x) = \alpha + \beta x$, som oftest stå for *ukjente* populasjonsstørrelser som vi er interessert i å si noe om basert på data trukket fra populasjonen.

Modell for data (enkel univariat regresjonsmodell).

Data består av gjentatte observasjoner av (x, Y) : $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. Uansett hvordan x_i -ene er oppstått (stokastisk eller valgte tall), oppfatter vi dem i modellen vår som faste tall som om de skulle vært valgt på forhånd. y_1, y_2, \dots, y_n , derimot, oppfatter vi som observasjoner av stokastiske variable, Y_1, Y_2, \dots, Y_n , som oppfyller:

$$(5) \quad Y_i = \mu(x_i) = \alpha + \beta x_i + e_i \text{ for } i = 1, 2, \dots, n$$

der e_1, e_2, \dots, e_n er uavhengige og identisk normalfordelte stokastiske variable kalt *restledd* (Løvås: “feilledd”) med forventning 0 og varians σ^2 (kort $e_i \sim N(0, \sigma)$, $i = 1, 2, \dots, n$).

Denne modellen er ekvivalent med å si at Y_1, Y_2, \dots, Y_n er uavhengige og normalfordelte med forventning, $E(Y_i) = \mu(x_i) = \alpha + \beta x_i$ og konstant varians, $\text{var}(Y_i) = \sigma^2$ (hvorfor?).

Parametrene α, β, σ tolkes nå nettopp som de ukjente populasjonsstørrelser vi er interessert i å si noe om (estimere eller teste hypoteser om) basert på data. Merk at den regresjonslinja vi beregner ut fra data bare er et estimat for (populasjons) regresjonslinja og derfor *ikke lik* denne. Forhåpentligvis, imidlertid, ligger den i nærheten.

Merk at (5) omfatter både kjente (observerbare) og ukjente størrelser i og med at modellen knyttes til en populasjon som ikke kan observeres i sin helhet. Størrelser vi kan beregne ut fra data kalles i en slik sammenheng for “observerbare”. Dette gjelder kun x_i -ene og Y_i -ene i (5).

² Og ikke *residual* som Løvås feilaktig kaller det øverst på side 272. Residual står for estimert (predikert) restledd som er noe annet, nemlig $\hat{e}_i = Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i$ (se nedenfor).

Det stokastiske restleddet, imidlertid, $e_i = Y_i - \alpha - \beta x_i$, er en ikke-observerbar stokastisk variabel siden den avhenger av de ukjente populasjonsstørrelsene, α og β (selv om vi har observerte verdier for x_i, Y_i , vet vi ikke hvilken verdi den tilsvarende e_i har fått).

I tillegg til å estimere α, β, σ , vil vi også ofte være interessert i å estimere forventet Y ($\mu(x_0)$) for en eller annen utvalgt verdi $x = x_0$ av interesse (som ikke nødvendigvis må være blant x_i -ene i data). I så fall er vi interessert i $\mu(x_0) = \alpha + \beta x_0$. For eksempel kunne vi være interessert å estimere forventet tid (gjennomsnittlig tid i populasjonen) på 1500m for skøyteløpere som oppnår 6:30 min (390 sek) på 5000m, nemlig $\mu(390) = \alpha + \beta \cdot 390$.

Minste kvadraters estimatorer $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ for α og β , er definert som funksjoner av x_i -ene og Y_i -ene som minimerer kvadratsummen $Q = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \alpha - \beta x_i)^2$ med hensyn på α og β .

Dette er akkurat det samme minimeringsproblemet som er gjennomført i regr.-I-notatet og løsningen er gitt i regel 2 i det notatet (side 8), der den eneste forskjellen er at de små y_i -ene (står for observerte tall) er byttet ut med de tilsvarende stokastiske Y_i -ene.

De fem størrelsene fra regr.-I-notatet som regresjonsbergingen bygger på blir nå:

(6)

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \quad s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad s_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2, \quad S_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})$$

Her er \bar{x}, s_x^2 å oppfatte som konstanter, mens \bar{Y}, s_y^2 og S_{xy} er stokastiske variable.

Av formlene i regel 2 i regr.-I-notatet pluss litt kjedelig algebra basert på regel 4.12 og 4.17 i Løvås, kan vi formulere følgende regel

Regel 1

(a) Minste kvadraters (mkv) estimatorer for $\alpha, \beta, \mu(x_0)$ er gitt ved

$$\hat{\beta} = \frac{S_{xy}}{s_x^2}, \quad \hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta} \bar{x} \quad \text{og} \quad \hat{\mu}(x_0) = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_0$$

(b) $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ og $\hat{\mu}(x_0)$ er alle forventningsrette.

(c) Variansene er gitt ved

$$\text{var}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{(n-1)s_x^2}, \quad \text{var}(\hat{\alpha}) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{(n-1)s_x^2} \right) \quad \text{og} \quad \text{var}(\hat{\mu}(x_0)) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{(n-1)s_x^2} \right)$$

Merk at formlene som Løvås gir nederst på for variansene til $\hat{\alpha}$ og $\hat{\beta}$ er litt anderledes formulert. Sjekk selv at uttrykkene i Løvås må være lik uttrykkene i regel 1(c)

Siden mkv-estimatorene er forventningsrette, vil standardfeilene være lik standardavviket som vi ser avhenger av populasjons-standardavviket, σ . Vi trenger derfor å estimere denne..

Utgangspunktet er en estimator for σ^2 :

Motivasjon (frivillig lesning). Om restleddet, $e_i = Y_i - \alpha - \beta x_i$, vet vi at $E(e_i) = 0$

og $\sigma^2 = \text{var}(e_i) = E(e_i^2) - (E(e_i))^2 = E(e_i^2)$. Dermed (hvorfor?) $E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2\right) = \sigma^2$.

Om vi hadde kunnet observere e_i -ene ut fra data (hvilket vi ikke kan), ville vi således

kunne benytte $\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2$ som forventningsrett estimator for σ^2 . $\tilde{\sigma}^2$ er imidlertid

ubrukelig siden den ikke er observerbar. Men, siden vi kan estimere (predikere) det ikke-observerbare restleddet, e_i , ved den observerbare residualen, $\hat{e}_i = Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i$, er det naturlig å prøve å erstatte e_i med \hat{e}_i i $\tilde{\sigma}^2$. Litt algebra (som vi ikke tar her) viser

nå at $E\left(\sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2\right) = (n-2)\sigma^2$. Dermed (hvorfor?) får vi en forventningsrett estimator for

σ^2 ved $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2$ - som er den som benyttes. Vi trenger en regneformel for

denne. På grunn av måten mkv-estimatorene er konstruert på, innser vi at residualen, \hat{e}_i , simpelthen er den stokastiske variabelen bak residualen, d_i , definert i regr.-I-

notatet. Av side 10 i notatet får vi derfor $\sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2 = SS_E$, der SS_E nå står for den

stokastiske variabelen vi får ved å bytte ut alle små y_i -er med store Y_i -er. Ved å

benytte regel 3 i regr.-I-notatet og sette inn for $r = S_{xy} / (\sqrt{s_x^2 S_y^2})$, får vi

$$SS_E = (n-1)S_y^2 \left(1 - \frac{S_{xy}^2}{s_x^2 S_y^2}\right) = (n-1) \left(S_y^2 - \frac{S_{xy}^2}{s_x^2}\right) = (n-1) \left(S_y^2 - \hat{\beta}^2 s_x^2\right)$$

Motivasjon slutt.

Av dette får vi

Regel 2

(a) En forventningsrett estimator for σ^2 er gitt ved

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SS_E}{n-2} = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2 = \frac{n-1}{n-2} \left(S_y^2 - \hat{\beta}^2 s_x^2\right) \quad (\text{kalt } s^2 \text{ i Løvås})$$

der $\hat{e}_i = Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, er residualene fra regresjonen.

(b) Populasjons-standardavviket, σ , estimeres vanligvis ved

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2} \quad (\text{kalt } s \text{ i Løvås})$$

Inferens.

La θ stå for en av de ukjente populasjonsstørrelsene, $\alpha, \beta, \mu(x_0)$, og $\hat{\theta}$ for mkv estimatoren.

Siden $\hat{\theta}$ er forventningsrett, er standardfeilen lik standardavviket, $\sqrt{\text{var}(\hat{\theta})}$. Estimert standardfeil som Løvås betegner med $SE(\hat{\theta})$, fås ved å erstatte den ukjente σ med estimatoren, $\hat{\sigma} = \sqrt{SS_E/(n-2)}$, i **regel 2**.

Tabell 1 ($\hat{\sigma}$ er lik s i Løvås)

θ	Mkv estimator $\hat{\theta}$	Estimert st.feil $SE(\hat{\theta})$
α	$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{x}$	$\hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{(n-1)s_x^2}}$
β	$\hat{\beta} = \frac{S_{xy}}{s_x^2}$	$\frac{\hat{\sigma}}{s_x \sqrt{n-1}}$
$\mu(x_0)$	$\hat{\mu}(x_0) = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_0$	$\hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{(n-1)s_x^2}}$

Tester og konfidensintervall bygger nå på det fundamentale teoremet (bevist i videregående teori) formulert i regel 3, og følger det samme mønsteret beskrevet i notatene *oversikt over tester og konfidensintervall*.

Regel 3

(a) Under modellen beskrevet i (5) gjelder for alle $n > 2$

$$W = \frac{\hat{\theta} - \theta}{SE(\hat{\theta})} \sim t_{n-2} \text{-fordelt} \quad (\text{t-fordelt med } n-2 \text{ frihetsgrader}).$$

(b) Hvis $n \geq 30$ omtrent, er W tilnærmet $N(0, 1)$ -fordelt selv om Y_i -ene ikke er normalfordelte.

Konfidensintervall. La $t_{n-2,r}$ betegne r -kvantilen i t_{n-2} -fordelingen (definert ved $P(W > t_{n-2,r}) = r$).

Av regel 3(a) får vi et eksakt³ $1 - \alpha$ konfidensintervall for θ

³ Denne alfaen må ikke forveksles med konstantleddet alfa i regresjonsfunksjonen $\mu(x) = \alpha + \beta x$ i populasjonen (Løvås' notasjon)

$$(7) \quad \hat{\theta} \pm t_{n-2, \alpha/2} SE(\hat{\theta})$$

$$\text{dvs } P\left(\hat{\theta} - t_{n-2, \alpha/2} SE(\hat{\theta}) \leq \theta \leq \hat{\theta} + t_{n-2, \alpha/2} SE(\hat{\theta})\right) = 1 - \alpha.$$

Tester. La som i notatet *oversikt over tester* θ_0 betegne en kjent hypotetisk verdi av θ . Om den sanne verdien θ er lik θ_0 eller ikke vet vi ikke. Som i oversiktsnotatet for tester vil vi bruke samme testobservator for diverse tester om θ :

$$\text{Testobservator: } T = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{SE(\hat{\theta})}$$

Under regel 3(a) vil T være t_{n-2} -fordelt som W kun i det spesielle tilfellet at $\theta = \theta_0$, noe som er tilstrekkelig for å bestemme den kritiske verdien (som vil være en kvantil i t_{n-2} -fordelingen) og p-verdien.

Tabell 2

Test-situasjon	H_0	H_1	Testobservator	α -nivå test: Forkast H_0 hvis	P -verdi (t_o er observert verdi av T)
1	$\theta \leq \theta_0$	$\theta > \theta_0$	$T = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{SE(\hat{\theta})}$	$T > t_{n-2, \alpha}$	$P_{\theta=\theta_0}(T > t_o)$
2	$\theta \geq \theta_0$	$\theta < \theta_0$	$T = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{SE(\hat{\theta})}$	$T < -t_{n-2, \alpha}$	$P_{\theta=\theta_0}(T < t_o)$
3	$\theta = \theta_0$	$\theta \neq \theta_0$	$T = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{SE(\hat{\theta})}$	$T < -t_{n-2, \alpha/2}$ eller $T > t_{n-2, \alpha/2}$	$2 \cdot P_{\theta=\theta_0}(T > t_o)$

Merk at hvis $n \geq 30$ omtrent kan vi bytte ut t -fordelingskvantilene med tilsvarende kvantiler i $N(0, 1)$ og oppnå en test med tilnærmet nivå α . Likeledes under beregningen av p-verdier, kan vi anta T er tilnærmet $N(0, 1)$ -fordelt. Dette gjelder selv om Y_i -ene ikke er normalfordelte.

Regneeksempel (Skøytedataene fra EM Heerenveen 2004)

Antall observasjonspaar: $n = 27$ (uten Ervik).

x svarer til tiden (i sekunder) på 5000m (ikke-stokastisk) og Y står for tiden (i sekunder) på 1500m (stokastisk).

De fem grunnleggende størrelsene, som gjør resten av regresjonsberegningene relativt enkle med kalkulator, får vi fra Excel⁴:

Tabell 3

	\bar{x}	\bar{Y}	s_x^2	S_y^2	S_{xy}
Observert verdi	407,98	112,41	186,0527	8,24001	26,48637

Anta vi i tillegg til regresjonsparametrene er interessert i forventet tid på 1500m hvis 5000m tiden (dagen før) var 6:30 min blank (= 390 sek), nemlig $\mu(390) = \alpha + \beta \cdot 390$.

Vi finner observert verdi: $SS_E = (n-1) \left(S_y^2 - \frac{S_{xy}^2}{S_x^2} \right) \rightarrow 116,2050$

Estimatet på σ^2 blir dermed:

$$(8) \quad \hat{\sigma}_{obs}^2 = 4,64820$$

Vi finner nå lett (med kalkulator eller Excel):

Tabell 4

Estimator	Estimat	St. feil
$\hat{\theta}$	$\hat{\theta}_{obs}$	$SE(\hat{\theta})_{obs}$
$\hat{\alpha}$	54,3302	12,6535
$\hat{\beta}$	0,1424	0,0310
$\hat{\mu}(390)$	109,85 sek (1:50 min)	0,6948

Vi ønsker 95% konfidensintervall. Vi trenger da kvantilen $t_{25, 0,025} = 2,060$ (fra tabell D5 i Løvås).

Tabell 5

Parameter	95% konfidensintervall	
	Nedre grense	Øvre grense
θ	$\hat{\theta} - (2,06)SE$	$\hat{\theta} + (2,06)SE$
α	28,264	80,396
β	0,0785	0,2062
$\mu(390)$	108,42 sek (1:48 min)	111,28 sek (1:51 min)

⁴ Jfr. Excel-øvelsen på slutten av Regr.-I-notatet.

Vi ønsker nå å teste om det er sammenheng mellom x og Y i det hele tatt, nemlig om det er sterk evidens i data for at $\beta \neq 0$. Det betyr i det generelle oppsettet at θ nå er β og $\theta_0 = 0$. Testobservatoren blir her

$$T = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{SE(\hat{\theta})} = \frac{\hat{\beta}}{SE(\hat{\beta})}$$

og tabell 4 gir observert verdi av testobservatoren:

$$t_0 = T_{obs} = \frac{0,1424}{0,0310} = 4,59$$

Tosidig hypotese: $H_0 : \beta = 0$ mot $H_1 : \beta \neq 0$

Valgt signifikansnivå: for eksempel 5%.

Kritiske verdier: $\pm t_{25, 0,025} = \pm 2,06$

Testkriterium (5% signifikansnivå): Forkast H_0 hvis $T_{obs} < -2,06$ eller $T_{obs} > 2,06$

Konklusjon: Forkast H_0 siden $T_{obs} = 4,59$,
(eller: “det er sterk evidens i data for at $\beta \neq 0$ ”).

I dette tilfellet er det kanskje rimeligere å formulere problemet som ensidig ut fra allmenn viten (?) om skøyteløpere som deltar i all-round mesterskap: nemlig at hvis det er sammenheng, så må den antakelig være positiv. I så fall ville vi foretrekke å teste den ensidige hypotesen under istedenfor:

Ensidig hypotese: $H_0 : \beta \leq 0$ mot $H_1 : \beta > 0$

Valgt signifikansnivå: for eksempel 5%.

Kritisk verdi: $t_{25, 0,05} = 1,708$

Testkriterium (5% signifikansnivå): Forkast H_0 hvis $T_{obs} > 1,708$

Konklusjon: Forkast H_0 siden $T_{obs} = 4,59$,
(eller: “det er sterk evidens i data for at $\beta > 0$ ”).